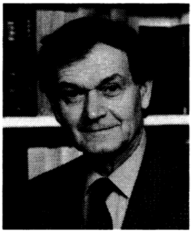
20世紀および21世紀の数理物理学

Mathematical Physics of the 20th and 21st Centuries

R. ペンローズ

●訳：牛腸 徹（東京大学）



【著者紹介】

ロジャー・ペンローズ (*Roger Penrose*)

1931 年，イギリスのエセックスに生まれる．家族はみな数学が得意で，兄のオリヴァーは数学者であり，弟のジョナサン（心理学者）はイギリスのチェス・チャンピオンに 10 回輝いているという．
ケンブリッジ大学で W.V.D. ホッジのもとで代数幾何学を学んだ後，J. トッドに師事，1957 年に同校で博士号を取得．イギリス国内やアメリカの各地で研究活動を行い，1964 年にロンドン大学バークベック校準教授となる．1972 年にはロンドン王立協会フェローに選出され，1973年よりオックスフォード大学数学科教授．現在は同校名誉教授であると同時にロンドンのグレシャム校の幾何学教授である．また 1998 年より米国科学学士院外国人会員．
S. ホーキングとともに 1998 年に受賞したウルフ賞のほか，数多くの受賞歴があり，1994 年には英国王室からナイトの称号を授与されている．
幾何学の様々な側面に興味を持っているが，特に非周期的敷き詰め問題，一般相対性理論や量子論の基礎の研究で知られる．また意識の科学にも貢献している．主な研究業績にツイスター理論があるが，これはアインシュタインの一般相対性理論と量子力学とを結びつける研究で，彼が 30 年以上前に創始して研究してきたものである．

1　20世紀の物理学における二つの大きな変革

物理学的世界に対する我々の描像は，20世紀において驚くべき二つの変革を経験しました．これらのうちの最初のものは，**空間**と**時間**に対する我々の描像を完全に変えてしまい，これら二つの基本的な概念が，**時空**と呼ばれるただひとつの実体に融合されるというだけでなく，さらにその構造の中に**重力**という普遍的な現象を組み入れているような実体に融合されるという観点をもたらしました．この描像は大きなスケールでの物理学的な振る舞いに対する理論を与え，その理論は既知の巨視的な事実と完全に一致し，(少なくともある特定の既知の物理系において)10^{14}分の1という精度まで正確であることが分かっています．第二の変革である**量子**変革は，**物質**に対する我々の描像を完全に変えてしまい，ひとつの粒子は事実上同時刻にいくつかの異なる場所に存在することができるという観点を与えました．そこでは，遠く離れたいくつかの物理系は離れているにもかかわらずひとつの実体として取り扱われなければなりません．またあることが**起こったかもしれない**という単なる可能性がたとえそれが**起こっていなかった**としても，実際に起こることに対してハッキリとした影響を与えます．さらに位置と運動量という古典的な概念が互いに相容れないものであることが判明します．この観点は微視的なスケールでの現象に対する非常に広範囲に渡る応用を持つ理論を与え，その正確さはいくつかの異なる状況において少なくとも10^{11}分の1という精度で正確であることが分かっています．

相対性理論と**量子力学**というこれらの理論はどちらも，物理理論としての強力さや世界の仕組みに対して与えている深い洞察によって際立っているだけでなく，それを記述するために必要となる数学の美しさや精巧さによってもまた際立っています．物理学における**基本的な**レベルにおいて，適切な数学的アイデアは，数学が普通の数学的記述の中でしばしば果たしているような，単に組織立てて明確化するという役割だけを果たしているのだとしたときに期待できるような種類の事柄を遥かに超えた強力さと正確さを持ちます．逆に，物理学上の基本的なアイデアが驚くほど実り豊かな数学の新しい研究分野に着手するための刺激となることがありえます．このことは，一方は完全に抽象的な実体に関する必然的な真理に関係し，他方は現実の宇宙におけ

る現実の事柄を支配している詳細な原理に関係する，人類の営みの中のこれら二つの分野間の驚くべき緊密な関係を与えてきました．

しかしながら，この種の緊密な関係は20世紀に特有なものであるというわけでは全くありません．すでに古代ギリシア時代において，すなわち紀元前4世紀頃には，数学的な構造と物理学的世界の仕組みの間のこの驚くべき調和の最初の例が，ユークリッド幾何学において明らかにされました．実際，この調和は余りに完全なものだったので，ギリシア人達は，彼らが成し遂げたことの本質を認識してさえいなかったのかもしれません．（プラトンによって明確にされたように）確かに彼らは，(1) 彼らが演繹した純粋に抽象的で数学的な幾何学と (2) 基本的には剛体のことである，この幾何学と単に非常に良い精度で一致するだけの物理学的実体との間の区別を認識していました．しかしながら，非常にエレガントで抽象的な数学的構造と，物理学的世界における現実の物体の間に起こる一連の正確な空間的関係とを結び付けている，この驚くべき緊密な関係が実際に存在するということがいかに驚くべき事実であるのかということを，おそらく彼らは完全には理解していなかったのではないかと思います．

ユークリッド幾何学は，アルキメデスやその他の人々によって紀元前3世紀以来発展させられてきた静力学という古代科学において中心的な役割を果たしました．17世紀には，ガリレオやニュートンの**力学**によって，幾何学だけでなく**運動**状態にある物体の動力学的な振る舞いも，強力な数学的構造と非常によく一致するということが示されました．**微分法**は，物体の運動を支配する法則を記述するというハッキリとした目的のために発展させられました．しかしながら，この微分法はすぐにそれ自身の活力を持ち始め，それがもともと考案された目的を遥かに超えるいくつもの数学的応用を持つようになりました．また一見したところ共通点がないように見える多くの数学的な事柄の中に統一性が認められました．おそらく最も重要なものは微積分学の基本定理によってハッキリと示されているものでしょう．それは運動の法則を記述するために必要な数学的形式と，長さや面積，体積，重心などを計算することに関係した数学的形式との間にある密接な（逆の）関係を表わしています．さらに，オイラー，ラプラス，ラグランジュ，アストラグラツキー，ポアッソン，ハミルトンといった数学者達によってもたらされた統一性へ向け

ての発展により，物理学的世界に対するガリレオやニュートンによる枠組みと，多くの抽象的で美しい数学的構造との間にある深い調和が明らかになり始めました．

19 世紀に物理学的世界に対する我々の見方に次の大きな変化が起きました．それはファラデーの実験結果に動機づけられて，マクスウェルが電磁場の力学と光の振る舞いに対する基礎的な場の方程式を導入したときでした．**場**という概念は，(例えば，重力ポテンシャルに関する場合のように) それ以前からすでに知られていましたが，マクスウェル方程式という文脈で初めて，場という概念が独立した自由度を持ったそれ自身の物理学的実体を獲得しました．いくつかの粒子からなる系が有限個の (離散的な) 自由度を持つのに対して，電磁場は**無限個**の (連続的な) 自由度を用いて記述しなければなりませんでした．また，いくつかの粒子からなる系の力学の場合のように常微分方程式によってその振る舞いが決まるのではなく，電磁場の振る舞いは**偏**微分方程式によって決まることが分かりました．もちろん偏微分方程式は，連続的な流体や弾性体の研究，あるいは重力ポテンシャルを取り扱うためにもすでに用いられていました．しかしながら，今や場は粒子だけに付与すべき “物理学的実体” に対する単なる近似や補助的な概念ではなく，物理学的実体の基本的な構成要素を表わしていると考えられるようになりました．前に述べた基礎的レベルでの物理学と実り多い美しい数学の間の調和ということに完全に沿う形で，特定の形でマクスウェル方程式を表わすことによって，それらの方程式を現在ではカルタンの**外微分法**として知られている数学のもうひとつの分野と非常にエレガントな形で結びつけることができます．

さて，いよいよ我々の 20 世紀にたどり着きました．先に述べたように，そこでは，物理学的世界に対する我々の描像に関して，一つのみならず**二つ**の大きな変革がありました．実際，そのような変革は三つあった，あるいは四つあったとさえ言う人もいるかもしれません．これは，**特殊**相対性理論と**一般**相対性理論が別個の変革を表しているのだと見なし，さらに量子力学と**場の**量子論が別々の変革を表しているのかもしれないと見なすことに他なりません．これら四つの理論は，ニュートンの重力定数 G と，c^{-1} という逆数の形をとった光の速さ c と，ディラックが導入した形でのプランク定数 $\hbar$ という自然界における三つの基礎的な定数が果たす基本的な役割により特徴付

けることができます．$G, c^{-1}, \hbar$ のすべてが 0 であると考えられるときには，ガリレオとニュートンによる物理学が得られます（この場合，重力場は単に別な力として表現されます）．特殊相対性理論は，c^{-1} を 0 と異なる有限の定数とし，G と $\hbar$ を 0 と置くことにより特徴付けられます．アインシュタインの一般相対性理論は，$\hbar$ を 0 としたまま c^{-1} と G の両方を 0 と異なる定数とすることにより得られます．また理論を進めるための物理学的なアイデアは，加速度による効果と一様な重力場による効果の間の**等価原理**と呼ばれる基本的な原理です．（その後，アインシュタインの理論の極限として，$\hbar = c^{-1} = 0$ であり，かつ 0 でない G の値がその構造の中に組み込まれ，アインシュタインの等価原理の要請にやはり完全に応じた幾何学を得る方法がカルタンによって示されました.）量子力学は，$G = c^{-1} = 0$ であるものの，$\hbar$ という 0 でない基本的な定数の存在により特徴付けられます．一方場の量子論においては，やはり $G = 0$ であるものの，$\hbar$ と c^{-1} は 0 でない定数となります．（等価原理が完全に組み込まれた形の）G と $\hbar$ の両方ともが 0 でないような完成した（完全に信用のできる）理論はまだ見つかっていません．

特殊相対性理論とともに，**ミンコフスキー時空の幾何学**という新しい幾何学的な概念が生まれました．それは，単に 3 次元でなく 4 次元の幾何学であるという点だけでなく，現在では**ローレンツ計量**と呼ばれている種類の正定置ではない計量を許容しているという点で，もともとのユークリッド幾何学とは異なるものでした．一般相対性理論もこの性質を保持していますが，今や幾何学は，主に 19 世紀に導入されたリーマンやその他の人々のアイデアに従って，**曲がった**空間を扱うものになります．量子力学は**複素ヒルベルト空間**という概念に依存しており，非可換な物理変数のような，基礎物理学にとっては新しいものであった多くの数学的アイデアが用いられます．特殊相対性理論におけるのと同様に，群論は量子力学においても基本的な役割を果たします．現在の場の量子論に関して言えば，重要な役割を果たしているものの中に汎関数積分や無限次元の関数空間というアイデアがあり，それ以前に生まれた理論とは違うこの理論の特色を表わしています．

“ゲージ接続”というアイデアも現在の場の理論や素粒子物理学にとって欠くことのできないものです．それは，基本的には接続という微分幾何学的なアイデアが時空上のベクトル束に適応されたものであり，電磁気学をアイン

シュタインの一般相対性理論の枠組みの中に取り込む方法に関するワイルの初期のアイデアから生まれました．現在の素粒子物理学の“標準模型”はゲージ接続(あるいは，ヤン-ミルズ場)という概念に大きく依存しています．この模型は調整が上手く進んでおり，現在では実験事実と非常に良い一致を見せています．それにもかかわらず，この模型には(17，あるいはそれ以上の)多くの数値的なパラメーターと，見たところ任意性が高い他の性質が含まれており，どのような根本的原理がこれらを決定するもとになっているのかを知ることは好ましいことだと思います．

もちろん，数理物理学の中には先に私が“基礎的”と呼んだ分野以外にも多くの分野が含まれています．系が巨大な数の構成粒子を含んでいる場合には，新しい数学的アイデアが役割を果たすことがありえます．流体の理論は，17世紀にニュートンやダニエル・ベルヌーイの仕事とともに始まり，19世紀のナビエ-ストークス方程式や，それに関する20世紀の多くの数学的な研究へと繋がりました．19世紀にガロアやその他の人々によって完全に純粋数学的な理由から導入された有限群の理論は，結晶の構造や宇宙の可能なモデルを理解するのに役立ちます．統計力学は，気体や相転移やブラウン運動など，非常に多くの分野において基本的な役割を果たします．これらの分野はある程度基礎物理学という細目とは独立したものですが，そこでは非常に美しく深遠な数学が関係しています．

熱力学の第2法則とボルツマンによる解釈は現在の統計力学にとって基本的なものです．しかし今や巨大な数の粒子からなる系の研究だけでなく，それ以外のものとも関係しています．最終的にはそこから第2法則が生まれることになった，宇宙の初期状態における最初の極めて低いエントロピーは実際のところどこから生じたのかということを我々は問うています．そして，宇宙論やビッグバンの構造を考察することを余儀なくされています．宇宙のエントロピーはそこで最初の“信じがたいほど”低い状態で始まりました．ここでは基礎物理学の問題が疑いようもなく深く関係しています．この問は，ビッグバンの性質そのものと，また何故それが例外的に特別なのかということに関係しています．これらの問題については，次の節で立ち返ることにしましょう．

このことはまた別の問題をもたらします．20世紀の物理学は驚くほど広範囲で正確な理論を提供し，それ以前の素晴らしい物理理論にもまして，数学

的な概念とのより深くより広範囲に渡る緊密な関係を見せていることを注意しました．しかしながらこれら現在の理論が深刻な困難を伴っていないわけではありません．例えば，一般相対性理論では，少なくとも，初期の宇宙やブラック・ホールへの重力崩壊を表わすモデルとハッキリとした意味で質的に十分似通った時空のモデルに対しては，必然的に**特異点**へと導かれます．そのような特異性を持つ領域では，エネルギー密度や曲率が(理論的には)無限大の値に達する，あるいはもしそのような領域においても古典物理学や古典論的な時空の幾何学が変更を受けないままであるとすればそのようになるであろうと予想されています．同様に，場の量子論も発散積分や発散級数という形で無限大と出くわします．繰り込みという手続きや漸近的自由性は，理論が数学的には矛盾を含むという事実にもかかわらず，この理論の内部での進歩を可能にしています．しかしながら，最も良く確立された場の量子論の例，すなわち量子電磁力学でさえ，繰り込みの手続きを完全に経た後でもなお級数は発散しているという事実は残ったままです．

一方特殊相対性理論は，基本的にはミンコフスキー空間の4次元擬ユークリッド幾何学であり，完全に首尾一貫した数学的構造によって表現されているように思われます．通常の量子力学についてはどうでしょうか？ ヒルベルト空間もその対称性を記述するユニタリ変換と同様に，もちろん首尾一貫した数学的構造です．またユニタリ変換は，シュレーディンガーの力学方程式に従って滑らかに首尾一貫して起こり，時間が前に進むにつれて量子論的な状態を発展させます．しかしながら現実の世界における量子論的な状態はいつでもこのような形で時間発展すると考えられるわけではありません．時折，“観測”が行なわれたと考えられるときに，量子論的な状態は，その観測に関係した特定の実験の設定によって決まるあるエルミート作用素の固有状態に“ジャンプ”すると考えられます．

このことは，量子系の観測において，“実際に”何が起こっていると考えられるのかということに関するハッキリしない問題へと我々を導きます．見たところ，観測の過程で起こっていると考えられる**状態ベクトルの収縮**は，ユニタリ変換による時間発展という過程と露骨に矛盾していると言わざるをえません．どのようにして20世紀の物理学者達はこの問題と折り合いをつけてきたのでしょうか？ 哲学的な立場に関しては4つのおおまかなカテゴリーが

あるように思われます.

- ニールス・ボーアによる“コペンハーゲン的”観点は，状態ベクトルは実際に量子論的なレベルでの“実体”を表わしているのではなく，単に観測者の“心の状態”を表わしているのだと主張します．したがって，状態ベクトルの収縮という過程において起こる“ジャンプ”は単に観測者の**知識の状態**の不連続な変化の結果であり，物理学的な実体を持ちうるような物理学的な変化ではありません.

- “環境によるデコヒーレンス”という観点は，観測という過程において，物理系はそれを取り巻く環境と解きほぐしようもなく絡み合うことになるという事実を利用します．すると環境における自由度はランダムであり，かつ観測不能であると考えられるので，そのような自由度を“足し上げる”ことによって，状態ベクトルによる記述ではなく**密度行列**による記述が得られることになります．この密度行列が，物理的に妥当であると思われる基底に関して(事実上)対角行列となるときには，“すべての実際的な目的のためには”(FAPP[1])物理系は対角成分のうちのひとつによって表わされる状態にあり，その状態にある確率は対角成分の値によって与えられると考えらます.

- “多世界”という観点では，状態ベクトルは厳密にユニタリ変換による時間発展をし，物理学的な実体を表わしていると考えます．その結果，観測においてはあらゆる観測結果が**同時に存在**することになります．ただしそれら観測結果のそれぞれが観測者の意識の異なる状態と絡み合っています．したがって，対応する異なる意識状態もまた同時に存在し，それぞれが異なる“世界”を体験し，異なる観測結果に遭遇することになります.

- 最後に，量子力学の従来の定式化は暫定的なものであり，観測の過程に本当の意味付けをするためには何か**新しい物理理論**が必要であるという可能性があります．提案されている新しい枠組みの中には，(例えば

[1] (訳注) f̲or a̲ll p̲ractical p̲urposes の略です.

ド・ブロイ-ボームの枠組みやコンシステント・ヒストリーの理論のような)標準的な量子力学と異なるような観測結果は持たないものもありますが，別な枠組みによれば，少なくとも原理的には標準的な量子力学と新しい理論を区別するような実験が存在すると思われます．

おそらく今日の物理学者の大半は，これらの観点の中の最初の**三つ**の観点，すなわち“従来の”とみなすことができる観点を抱いていると言っても良いのではないかと思います．そうした物理学者達は，量子論の形式が持つ数学的な優雅さは言うまでもなく，量子力学の予言が目を見張るような形で例外なく実験により立証されているということが，この理論が何ら変更を必要としていないということを示しているという議論をするかもしれません．しかしながら，これらの物理学者のうちの多くがそれでもなお量子力学に関する現状にいくらかの居心地の悪さを感じているかもしれません．その理論に対する完全に認められた**唯一の**“解釈”が存在しないという単純な事実が，この居心地の悪さをいくらかあおっています．私自身の立場はこれら“従来の”解釈はどれも満足のいくものではないというものです．最終的には実際に新しい理論，それも従来の量子力学のものとは**異なる**実験結果を持つであろう新しい理論が必要になるでしょう．

2 21世紀に向けての新しい物理学？

何故新しい理論が必要なのでしょうか？ また，この理論はどのような現象の中に現在の量子論とは異なる結論を与えるのでしょうか？ 私の見るところ，量子論の基本原理とアインシュタインの一般相対性理論の基本原理との間には根本的な衝突があります．この衝突は，重ね合わせの状態にある時空幾何学が互いにかなり異なっているような量子論的な重ね合わせを考えるときに，その姿を現わします．(シュレーディンガー方程式にもとづく)ユニタリ変換による時間発展という概念そのものが時間方向の平行移動を与える作用素が定義されることを必要とします．しかしながら，重ね合わせに関わっているそれぞれの時空が持っている時間方向の平行移動という概念は異なっており，それらのうちのどの二つも自然な同一視をすることはできないでしょう．

そのような同一視を行なうためには，重ね合わせの下にある時空間の各点ごとの対応という標準的な概念が必要となるように思われます．しかしながら，こうした対応は，一般相対性理論の基本原理のひとつである**一般共変性の原理**を侵すことになるでしょう．したがって，シュレーディンガーの時間微分の作用素には本質的な不確定性が伴っています．この不確定性は，重ね合わせられた状態におけるエネルギーの不確定性 E_G として解釈することができます．ハイゼンベルグの不確定性関係のために，このエネルギーの不確定性は，そうした重ね合わせが根本的に**不安定**であり，$\hbar/E_G$ というオーダーの寿命を持つということと矛盾しません．ちょうど二つの時空幾何学が関係する重ね合わせに対しては，E_G という量は(遅い速度かつ小さな重力ポテンシャルというニュートン力学的な極限のもとで)問題としている二つの状態間の**質量分布の違いによる重力的な自己エネルギー**として見積もることができます．

この E_G というエネルギーはもの凄く小さいように見えるかもしれませんが，こうした方法で計算された寿命は多くの状況において無視できないことが分かります．ただし，こうして提案された効果がデコヒーレンスに関する従来のアイデアにもとづく標準的な予言と異なりうるような実験の設定を見つけることは難しいことです．それにもかかわらず，この提案を検証するための実行可能な実験が存在するように思われます．現在検討されているいくつかの提案された計画は，おそらく 10^{15} 個ほどではないかと思われる原子核からなる小さな結晶を，少しだけ異なる二つの位置で量子論的な線型重ね合わせの状態に置くということに関係しています．上で述べた提案によれば，重ね合わせの状態はおおよそ 10 分の 1 秒の間に客観的な過程として，一方**あるいは**もう一方の場所へと崩壊するはずです．こうした性質の実験が 20 世紀の終わりまでに行なわれることはほとんどありえません．しかしながら，かなり異なる質量分布が量子論的な線型重ね合わせの状態に置かれたときに，量子力学の規則が変更を余儀なくされるのかどうかということを判断できるような実験が，21 世紀の初頭に行なわれるということはありそうです．

もし，そうした実験が行なわれて，その実験結果を曖昧さなく解釈することができたとすると，現在受け入れられている量子論の法則には変更が必要であるということが実際に分かる**だろう**と私自身は強く考えています．もちろん，この件に関して私が間違っていたということになるかもしれません．

その場合，そうした実験は私自身の期待とは矛盾するような結果を与えるでしょう．私自身の観点から見てさらに不満足な結論は，実験結果は私の期待とは矛盾しないものの，それでもなお従来の量子論の枠内でも説明可能であり，そのため問題は白黒付かずに残ったままになるというものでしょう．しかしながら，議論を進めるために，そうした実験が実際に成功裡に行なわれ，一般相対性理論の原理が量子力学の原理と衝突し始めるようなレベルにおいて従来の量子論の形式は実際に変更を要するという結論を，その実験結果がほとんど曖昧さなしに指し示すことになるという“楽観的な”仮定をさせて下さい．

そこで，そのようになると仮定してみましょう．このとき，量子論を一般相対性理論の原理と調和させるためには，その規則にどのような種類の変更が必要になるのでしょうか？ おそらくシュレーディンガー方程式には何か付加的な項が存在するのかもしれないというような比較的小さな変更，又は，それとは別な何か些細な変更で済ませることができるでしょうか？ 例えば，ちょっとした非線形性が**不安定性**を引き起こし，かなり異なっている重力場の重ね合わせ，すなわち時空幾何学の重ね合わせが，ある特徴的な時間の後で，一方あるいはもう一方へと崩壊することになるかもしれません．実際のところ，古典論的な信号は光よりも速く伝わることはできないという因果律の原理と矛盾を生じないようにするためには，加えうる変更の種類に関していくつかとても強い制約が存在します．さらに**量子論的な絡み合い**という現象に関係して，量子論的な状態の収縮が客観的に起こるとするすべての**相対論的な**理論が出逢う困難を心に留めておかなければなりません．いま，アインシュタイン-ポドルスキー-ローゼン対，あるいはEPR対と呼ばれる一組の粒子が，共通の初期事象で作られるとしましょう．典型的な例は，それぞれがスピン1を持った粒子の一組であり，初期事象がスピン0の粒子の崩壊というものです．それらスピンを持つ粒子の内の片方のスピンの方向を観測することで，もう一方の粒子のスピンの状態は，観測を受けた粒子のスピンの方向と反対の方向であることを余儀なくされます．これは，一方の粒子からもう一方の粒子に光速以下で伝わる古典論的な信号では成しえないことです．二つの粒子の間の連関は**量子論的な情報**のチャンネルと呼ぶことができます．そのようなチャンネルは，光よりも速い速度で情報を送ることを禁じている

古典論的な信号の制約を侵しうるものです．因果律の通常の法則は，古典論的な信号が未来方向の光円錐の内部あるいは光円錐に沿って，未来に向って伝播するということを要請します．しかしながら，そのような法則は量子論的な情報として知られているこうした現象には当てはまりません．それは普通の意味での情報と質的に異なる何者かなのです．

こうしたことのすべてが物語っていることは，量子論的な状態の収縮を客観的な現象として受け入れるために必要となるであろう量子論の形式に対する変更は，物理学的世界に対する我々の描像における**根本的な変化**を意味するものであり，単に我々が用いている特定の方程式の比較的小さな変更を意味するわけではないであろうということです．さらには，我々が大切に持ち続けてきた原理のうちのいくつかを，最終的には徹底的に見直す必要が出てくるだろうと信じる理由が他にもあります．随分前から，一般相対性理論と場の量子論の両方における内部的な矛盾を解決するためには，何らかの適切な“量子重力”理論が必要となるであろうと予期されてきました．一般相対性理論において問題となるのは**時空特異点**の問題です．前にそれとなく述べたように，“特異点定理”によれば，初期の膨張宇宙，あるいは重力崩壊の最終段階に対する古典論における現実的な一般相対論的モデルは，どれも実際に**特異点**を持たなければなりません．そのような特異点においては，(通常)時空の曲率が無限大に発散し，そのような場所では，時空の構造に対する完全に古典論的な見方は放棄されなければならないであろうと考えられています．しかしながら，“従来の”量子重力理論はどれも，時空特異点の構造の基本的な性質であるように思われる，際立った**時間に関する非対称性**を説明することができないように思われます．ビッグバンという**初期の**特異点は全くもって極めて特殊なものであったに違いありません．それは，少なくとも $10^{10^{123}}$ 分の1という位に，いや，おそらくそれよりもさらにずっと特殊なものであったに違いありません．その一方で，ブラック・ホールの中，あるいは重力崩壊する閉じた宇宙の終局的な“ビッグ・クランチ”の中で生じる最終的な特異点は，完全に一般的なものであるように思われます．最終的に熱力学の第2法則を生み出すもとになっているのは，初期の特異点の構造と終局的な特異点の構造の間のこの際立った相違なのです．したがって私の考えでは，我々が探し求める量子重力の理論は**時間に関して非対称**な理論でなければなりま

せん．古典論的な一般相対性理論にも標準的な量子論の動力学にも時間に関する非対称性は何もありませんから，何か根本的に新しいものが実際に必要とされているように思われます．

量子物理学と一般相対性理論とのまだ見つかっていない統合に対するこの時間に関する非対称性の要請を，状態ベクトルの収縮を客観的な現象とする必要性に結び付ける根拠をいくつか挙げることができます．また初期のビッグ・バン特異点に対する極めて特殊な構造を要求するのは，熱力学の第 2 法則の存在だけではありません．直接的な観測結果から，初期の宇宙は極めて均一的であったことが分かっています．このことは，初期の宇宙が特殊であったという**あり方**に関する重要な側面であり，このこともまた理解する必要があります．この均一性は宇宙の初期の相において急激な指数関数的な膨張が起こった結果であるとする現在非常に流行している見方があり，**インフレーション**と呼ばれています．しかしながら，インフレーションは宇宙の中に十分な広がりを持った均一の領域がすでに存在していたとしなければ容易には機能させることができませんから，我々は初期の特異点の極めて特殊な性質という最初の問題に連れ戻されてしまいます．この観点の擁護者達は，熱力学の第 2 法則をもたらしうるように，どのようにしてこの極めて特殊な宇宙の初期状態が生じたのかというより深刻な問題に通常関心を持ちません．特異点の構造を量子重力的に決定する際の時間に関する非対称性の問題は，インフレーション・モデルにおいては適切な形で直視されてはいません．その上，インフレーション論者達は，長い間，観測される宇宙の空間方向全体の幾何学は**平坦**であるはずだということが彼らの観点の確定的な予言であると論じてきました．しかしながら，最近の観測宇宙論の流れはかなりハッキリと，双曲的な(負の曲率を持つ)空間方向全体の幾何学という方向に向いているように思われます．こうした理由から，もしインフレーションが 21 世紀の物理学の重要な一部分であることが判明するとしたら，私自身，非常に驚くことになるでしょう．

21 世紀の基礎物理学に向けて，非常に流行している他のアイデアのうちのひとつが，**弦理論**（あるいは “超弦理論”）と呼ばれているものです．これは，自然界におけるすべての基本的な力と素粒子に対する統一的な枠組みの一部として，(場の)量子論の規則と重力理論の規則との統合を与えることを目的

としたものです．その理論の初期の大きな野望のうちのひとつが，場の量子論における無限大を取り除くということでした．それが**重力**の枠組みであるというのは，オスカー・クラインの昔のアイデアと一致するものです．それによれば，$10^{-35}m$ という特徴的な(量子重力的な)**プランク長の**距離において，重力の効果が場の量子論における発散積分に対するカット・オフを与えるのではないかと考えられています．弦理論の持つ本質的に新しい特徴は，基本的な実体としての点粒子を“弦”に置き換えるということです．このとき弦は端を持っているかもしれませんし，閉じたループかもしれません．この理論は，大変な成功を自慢してきましたし，極めて興味深く価値のある数学的な発展に対して非常に多くの洞察を与えてきたということは間違いありません．しかしながら，無限大が全く現われない完全に矛盾のない明確な枠組みを与えるというこの理論の物理学上の目的は，その目標に向けていくらかの前進はあるように思われるものの，未だ達成されていません．20 世紀が終わりに近づくにつれて，この理論の専門家達は，“純粋な”弦理論から，“メンブレーン”などとして知られている高次元の構造をも取り入れる必要のある理論へと，その興味の対象を移してきました．そして，これらすべてのアイデアを包括的な枠組みの中に統一するはずの神秘的で未だ見つかっていない 11 次元の“M-理論”の探究が続けられています．また，この統一の一部分として，量子論と時空の構造や重力との正しい統合が得られるであろうと目論まれています．

現在の弦理論や M-理論といった理論における二つの構成要素は，**高次元性**と**超対称性**です．20 世紀初頭のカルーザとクラインに遡る高次元性に関する観点とは，我々が直接知覚する時空の 4 つの次元は $(n+4)$-次元多様体の構造のうちの一部であり，n 個の次元は現在ではプランク長のオーダーであると考えられている小さなスケールにしっかりと丸め込まれているために，我々が直接それらの存在に気付くことはないというものです．超対称性は，通常の時空の座標と矛盾しないと思われる反可換な変数により記述される余分な次元を持ち込みます．超対称性は，自然界において見つかるはずのすべての種類のボソンに対して対応した種類のフェルミオンが存在しなければならず，その逆も成り立つということを予言します．しかしながら，そのような“超対称パートナー”はどの粒子に対してもまだ見つかってはいません．

アインシュタインの一般相対性理論と(場の)量子論の間の正しい統合を見つけるための他のアプローチにおいても，現在活発な活動が行なわれています．最も活発に研究されており，一見したところ最も成功しているように見えるもののひとつに，アシュテカによるアインシュタインの場の方程式の再定式化から生まれ，“ループ変数”と呼ばれているものに至るものがあります．これらは，それがほとんど位相幾何学的な実体であるという魅力的な特徴を持っており，時空の計量という概念が，ことによると何らかのより原始的な組合せ論的なアイデアから演繹できるかもしれないと感じさせるものがあります．

3 “複素”数理物理学

前節で述べたいずれかのアイデアが，実際に生き残って，21 世紀の確立された物理学の重要な一部分になるという可能性はどのくらいあるでしょうか？量子論的な状態の収縮に関する私のコメントを除いて，私はここではこのことに関していくらか悲観的な見方をとろうと思います．もちろん，将来事の成り行きの中で，ここで私が言おうとしていることが間違っていたということが簡単に証明されるかもしれません．しかし，ここで私が思い切って意見を言うことさえしないとすれば，何事も得られないことになるでしょう．

超対称性に関して言えば，少なくとも現在の定式化の形では，自然界における物事の仕組みの中に超対称性が実際に存在するということに私は納得していません．超対称性が存在するという観測的な事実は本質的に何も存在していませんし，その強みは主に首尾一貫した統一原理としての潜在力と数学的な魅力にあるのです．私には，この数学的な魅力だけでは(そして首尾一貫性でさえも)観測による支えが無いということを克服するには十分ではないように思われます．同様に，時空には隠れた余分の次元が存在するという考えも，私にとっては魅力のあるものではありません．それは，ひとつにはこれら隠れた余分の次元が，それらが形成するとされている極めて小さなプランク・スケールの構造の中にどうして安定的に収まっているべきなのかということに対するもっともらしい理由を見出すことができないからです．その上

まもなく説明するように，(私にとっては)より重要な理由が存在します．その一方で，場の量子論に付随する無限大をエレガントに取り除くための潜在力ということに関しては，弦理論の根底にある初期のいくつかのアイデアは実際魅力的に思われます．弦理論に関して私を悩ませる主要な点は，そうならざるをえなかったのですが，弦理論が超対称性や高次元の時空を拠り所にしているということです．また真の“量子重力”理論であるという主張にもかかわらず，弦理論は一般相対性理論の根底にあるアイデアと本当には折り合いがつかないという事実もあります．

量子化された時空に対するループ変数というアプローチは，これら特定の欠点を抱えているわけではありませんが，私にとってそれを完全に説得力があるものにしてくれるような数学的な優雅さをまだ見出してはいません．(とりわけループ状態による表現には，私にとって少しも訴えかけるものがない過完備性が存在します.) その上ループ変数というアプローチは，別な難点，それも私にとっては重大と思える難点を抱えています．ただし，それは量子重力理論に対する他の**すべての**“直接的な”アプローチにも，したがってまた弦理論にも共通するものです．その難点とは，場の量子論の標準的な形式を無批判に受け入れているという点です．ところが前節で論じたように，状態ベクトルの収縮が客観的な現象となるためには，この形式の中での根本的な変更，すなわち量子力学的な状況において一般相対性理論の効果が重要になるときに現われるはずの変更が必要なのです．

もちろん，量子化に対するすべての真面目な試みが，(場の)量子論の標準的な手続きに依存しているということはそれほど驚くことではありません．なぜなら，これらの手続きを採用することなしには，どこから出発すればよいのかを知ることは困難だからです．そこで，最終的には適切な方向へと導いてくれると信じている私自身によるいくつかの考察を提示することで，この論説を終えようと思います．もっとも，私自身の科学上の人生における30年以上をこうした類のアイデアを究明しようと試みることに費やしてきたという事実が，おそらく私自身の立場をひどく色づけているのだろうということは十分承知しています！

基本となる提案は，単に量子論のすべての規則を受け入れるのではなく，量子論と相対性理論が共通して持っているような根底にある数学的な特徴を探

すことに注意を集中するべきであるということです．すなわち，一方(相対性理論)の法則をもう一方(量子論)の法則に従わせようと試みるのではなく，自然界がこの巨大なスケールの物理学と極微のスケールの物理学を繋ぎ合わせることを可能にしてきた隠れた調和に対する手がかりを見つけようとするべきであるということです．さて数学的な観点からすると，量子力学のエレガントで思いがけない特徴のうちで最も際立っているもののひとつが**複素数体**の極めて基礎的な役割です．複素数の導入の背後にある動機は歴史的には物理的なものというよりは数学的なものでした．というのも，これらの数は，代数方程式の解，級数の収束，三角関数や微分方程式やその他多くの事柄に関する公式に対して意味を持っていたからです．このことは，実数に対する最初の動機とは全く異なります．実数は，物理学上の測定から直接生じるような類の量の理想化として生まれました．量子力学の導入以前にも，複素数は大いに使われてきました．しかしながら，(2次元の流体力学，電気回路理論，あるいは振動論における複素数の利用のように)それらは基本的には“数学的なトリック”であると見なされていました．量子力学の場合に違っているように見える点は，複素数が正に理論の基礎，すなわち，**重ね合わせの原理**の中に入ってくるということです．それは，あたかも世界に対する自然界のデザインの一部として，複素数がずっとそこに存在していたかのようです．

量子力学における複素数体のこの基本的な役割を説明するひとつの方法は，2節で言及した**量子論的な情報**の問題に立ち返ることです．古典論的な情報が，確率を計る**実数**(あるいは，ビットを計る整数)によって見積もられるのに対して，量子論的な情報は本質的に**複素数**で表わされる量です．量子論的な情報の“伝達”によって伝えられる**複素振幅**は，量子論の形式の基本的な構成要素を与えます．また二つの量子論的な実体の間の基本的な“連関”は量子論的な情報のリンクです．このリンクは通常の古典論的な因果律の規則に従いません．なぜなら，EPR現象においてそうであるように，一連のリンクは時間に関して前進したり後退したりとジグザグに進みうるからです．量子論的な情報のリンクから，(必然的に未来に向って因果的に伝播する)古典論的な情報のリンク，あるいはより正確には古典論的な確率に移行するには，量子力学的な複素振幅 α にその複素共役 $\bar{\alpha}$ を掛け算して，(非負の)実数 $\bar{\alpha}\alpha$ を得る必要があります．(実際，複素共役の振幅は，時間に関して反対方向に

進む量子論的な情報のリンクにあてがわれたものであると考えることができます.)

確率とこのような不思議な“平方根”の関係を持つ量子論的な振幅は，極めて抽象的なもののように見えます．しかしそれらは実際に時空の幾何学と密接な関係を持っています．このことは，電子や陽子や中性子といった質量を持つスピン 1/2 の粒子のスピンの状態を調べてみると最も簡単に分かります．スピンの純粋状態のそれぞれが空間における方向と関係しています．この方向は，粒子のスピンがその方向を向いているかどうかを測定したときに，確率 1 で“そのとおり”という答えが得られるような方向です．この一般的なスピンの状態は，$|\uparrow\rangle$ を“上向きスピン”の状態，$|\downarrow\rangle$ を“下向きスピン”の状態として，$\alpha|\uparrow\rangle+\beta|\downarrow\rangle$ という複素数係数の線型重ね合わせであると考えることができます．重ね合わされた状態のスピンの方向は，幾何学的には β/α という比からなる**リーマン球面**上の点として表現することができます．このとき，球面の北極“0”は $|\uparrow\rangle$ $(\beta/\alpha=0)$ という状態を，南極“∞”は $|\downarrow\rangle$ $(\beta/\alpha=\infty)$ という状態を表わします．したがってこのリーマン球面は，量子力学における複素振幅(の比)と空間内の方向の幾何学との間の直接的な対応を与えています．

相対性理論における光円錐の幾何学では，さらに適切で基本的なリーマン球面の役割が存在します．時空内の特定の点 x に位置している観測者は，球面，すなわち観測者の視野全体がなす球面 S によって囲まれているように見えます．この球面 S は，より正確には点 x を通る光線全体のなす空間，あるいは点 x における(向き付けを考えない)**ヌル方向**全体のなす空間であると考えることができます．球面 S をリーマン球面と考えることが自然である理由は，S には自然な共形構造(と向き付け)が定まり，点 x にいるある観測者からこの観測者に対して光速に比較しうるくらいの速さで動いている別な観測者に移るときに，この共形構造が保たれるからです．光行差の効果のために，最初の観測者と二番目の観測者が，S をユークリッド空間内の球面として自然に表現する方法は異なりますが，それらは共形変換によって関係付けられていることが分かります．実際，このようにして S の向きを保つ**すべての**共形変換を得ることができます．S をリーマン球面と見なすことによって，次のような驚くべき事実を提示することができます．すなわち，相対論的な

物理学において最も重要な群である x という事象における(向きを保つ)ローレンツ変換全体のなす群は，最も単純な閉じた複素多様体の対称性を表わす群である(PSL$(2,\mathbb{C})$ という)リーマン球面の正則変換全体のなす群と自然に同型であるということです．

私の立場は，この驚くべき同型を量子論の基礎にある複素数に基づく構造と相対論的な時空の構造との間の基本的な関係を示唆するものであると考える，というものです．実際この同型は，基本的には $(1+3)$ 次元のローレンツ幾何学における簡約スピノール(あるいは"半スピノール")の特徴です．他の次元や符号では(すなわち $\mathrm{O}(1,3)$ や $\mathrm{O}(3,1)$ 以外では)正則構造(すなわち複素解析的な構造)と擬直交群 $\mathrm{O}(p,q)$ との間のこのような直接的かつ単純な関係は存在しません．したがってこの事実は，我々自身の宇宙において我々がたまたま体験することになった空間や時間の次元の数に特有なことなのです．上で示唆したように，私が高次元の理論に対して好感を持てないのは，こうした類の理由によります．

この同型は，$(1+3)$ 次元の時空の構造の研究に対して，**2-スピノール形式**が持っている格別な有用性の根拠にもなっています．(比例定数を除いて)2-スピノールは点 x における光円錐に沿う方向を定めます．ある意味で，光円錐を，任意に与えられたその円錐に沿った二つの方向の"量子論的な広がり"と考えることができます(もっとも，この解釈にはいくつか但し書きが必要です)．しかしながら2-スピノールは，直接的には時空内の**一点**における光円錐の幾何学を与えるだけです．我々は，時空内のある点と別な点の間の連関を理解する必要もあるのです．おそらくこの基本的な連関を原始的な"量子論的な情報"のリンクであると考え，それを図式的にはヌル方向に離れている二点を結ぶ光円錐に沿う線分であると考えてもよいでしょう．我々は，これを複素数を用いて記述される何者かであると考えるべきであり，実際それが**ツイスター**理論の出発点であると見なすことができます．

ここでは，ツイスター理論の詳細な記述に立ち入ることはしません．この理論は，3次元の複素射影空間 $\mathbb{C}P^3$ の幾何学を用いたミンコフスキー時空内の光線全体がなす空間の記述として始まりました．それは，古典論の場合にも，量子論的な波動関数に対しても，スピン(ヘリシティー)を持つ質量のない自由粒子のエレガントな記述を与えます．20年以上前に，それは曲率が**反**

自己双対となるような真空の(複素)アインシュタイン方程式(リッチ平坦性)の解の完全な記述を与えました．その後，(R.S. ウォードによって)反自己双対ヤン-ミルズ方程式に対して同様の構成が得られました．これらの構成は**左巻きの**"非線形重力子" を記述していると見なすことができます．ごく最近になり，**右**巻きの(非線形)重力子をもツイスター空間の構造の中に符号化することができるような方法が明らかになりました．今ではアインシュタイン方程式を完全にツイスター空間の構造の中に取り組むことができるという素晴らしい見通しが立っています．このツイスター空間は，ある正則な微分幾何学的な構造を持つ(通常は非コンパクトな)4 次元の複素多様体であり，局所的な情報を何も含んでいません．しかしながら，その大域的な構造が，考察している時空の(局所的，あるいは大域的な)幾何学的性質を符号化しています．

今のところツイスター理論のハッキリとした予言は何もありません．いずれにせよ，この理論の最終的な形はもう少し先にあるのです．それにもかかわらず，ここで一言コメントしておく価値はあります．我々の宇宙の初期のビッグバン特異点の極度の均質性は，この初期状態に対するツイスターによる単純な記述が存在するべきであるということを示唆しています．このビッグバンの構造に対する 3 つの標準的なモデル，すなわち，閉じた 3 次元球面 S^3 を空間的な切断として持つモデル，3 次元のユークリッド空間を空間的な切断として持つモデル，3 次元の双曲空間(ロバチェフキー空間)を空間的な切断として持つモデル，の中で，"ツイスター/正則" という哲学にハッキリと適合するのは三番目のモデルだけであるということは，いくらか注目に値します．その場合，ビッグバンの対称性のなす群は再び(制限)ローレンツ群やリーマン球面の対称性のなす群と同型である複素リー群 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ になります．この場合においてのみ，ツイスター理論の基礎にある哲学と矛盾しないビッグバンの構造が得られるのです．前に述べたように，現在の観測事実がこのモデルに好意的であるようだということは，このツイスター理論の観点から見ると心強いことです．

どのようにしてこうした考えのうちのいずれかが，場の量子論の厳格な規則からの逸脱があり，状態ベクトルの収縮が客観的に起こるような "量子重力" に関する観点へと導きうるのかということは，今のところハッキリしません．しかしいくらかその可能性は存在します．このように複素数という体

系に本質的に依存しているということに加えて，ツイスター理論には量子力学における手続きとの関係が確かに存在します．標準的な量子力学に現われる位置と運動量の間の正準交換関係は，ツイスター座標とその複素共役の間の対応する交換関係に組み込まれます．またこのことは時空の曲率の効果と関係しています．しかしながら，ツイスター理論と量子化の手続きの間の完全な関係は，まだ十分には調べられていません．

もし，そうしたアイデアが21世紀の物理学において重要な役割を果たすのだとすれば，アシュテカ変数やループ変数からのアイデア，あるいは弦理論(やM-理論)からのアイデアも関係しうるということはありそうなことです．興味をそそるひとつの可能性として，ここではn-カテゴリー(あるいはn-ヒルベルト空間)の理論が重要な役割を果たしうるのではないかということがあります．量子物理学と時空の構造を統合するための適切なアイデアがどのようなものになろうとも，それらはこれまでに提唱されたどんな枠組みとも多くの重要な点において異なっていそうです．しかしそのような理論が現われたときに，実際それが世界の仕組みに対する我々の理解に新たな変革をもたらすようなものであるとすれば，それは甚大な影響を与えることになるでしょう．これらの影響は，時空特異点や場の量子論的な無限大のように，量子重力からのインプットを必要としていると認められてきた基礎物理学の分野のみにとどまらず，固体物理学や，さらには生物学といった，一見離れているように見える分野にも及ぶことでしょう．私はこの先のわくわくする時代を期待しています．

■**謝辞**　詳細に渡る議論をしていただいたことに対して，アントン・ゼイリンガーとインスブルックにおける彼の実験グループに感謝したいと思います．また，これらの提案された実験に関して重要な意見をいただいた，アンダース・ハンソン，およびヨハネス・ダプリッヒにも感謝したいと思います．さらに，PHY 93-96246という契約のもとで援助していただいたNSFにも感謝したいと思います．

参考文献

[1] Baez, J. ed. (1994) Knots and Quantum Gravity, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications 1 (Clarendon Press, Oxford).

[2] Bailey, T.N. and Baston, R.J., eds. (1990) Twistors in Mathematics and Physics London Mathematical Society Lecture Notes Series, 156 (Cambridge University Press, Cambridge, UK)

[3] Bell, J.S. (1966) Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics (Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK 1987)

[4] Börner, G. (1988) The Early Universe (Springer-Verlag, Berlin Heidelberg).

[5] Green, M.B., Schwarz, J.H. and Witten, E. (1987) Superstring Theory, Vols. 1 and 2 (Cambridge University Press, Cambridge, UK).

[6] Hawking, S.W. and Ellis, G.F.R. (1973) The Large-Scale Structure of Space-Time (Cambridge University Press, Cambridge, UK)

[7] Huggett, S.A. and Tod, K.P. (1985) An Introduction to Twistor Theory, London Math. Soc. student texts (L.M.S. publ.).

[8] Jozsa, R.O. (1998) Entanglement and quantum computation. In The Geometric Universe, eds. S.A, Huggett, L.J. Mason, K.P. Tod, S.T. Tsou, and N.M.J. Woodhouse (Oxford University Press, Oxford) pp.369-79.

[9] Moroz, I., Penrose, R., and Tod, K.P. (1998) Spherically-symmetric solutions of the Schrödinger-Newton equations:. Class. and Quantum Grav. 15, 2733-42.

[10] Penrose, R. (1996) On gravity's role in quantum state reduction Gen. Rel. Grav. 28, 581-600.

[11] Penrose, R. (1998) Quantum computation, entanglement and state-reduction Phil. Trans. Roy Soc. (London) A 356,1927-39.

[12] Penrose, R. (1999) The central programme of twistor theory. *Chaos, Solitons and Fractals.* Vol. 10, pp. 581–611.

[13] Penrose, R. and Rindler, W. (1984) Spinors and Space-Time, Vol. 1: Two-Spinor Calculus and Relativistic Fields (Cambridge University Press, Cambridge, UK).

[14] Penrose, R. and Rindler, W. (1986) Spinors and Space-Time, Vol. 2: Spinor and Twistor Methods in Space-Time Geometry (Cambridge University Press, Cambridge, UK)

■**謝辞**　本稿の翻訳にあたり，同僚の加藤晃史氏，松尾厚氏に貴重なご助言をいただきました．ここに記してお二人に感謝の意を表したいと思います(訳者)．